Université IBN TOFAÏL

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

Filière: SMP et SMC

Semestre S1

Cours d'Analyse I

Automne 2012

Chapitre 1: Les suites

Pr. Ch. Bensouda

Chapter 1 Suites de nombres réels, suites numériques:

Définition:

Une Suite infinie de nombre réels que nous noterons $(X_n)_n$ *est la donnée d'une succession infinie de nombres réels non nécessairement tous différents.*

Exemples:

1- Une suite peut être donnée sous forme d'un tableau

n	0	1	2	3	-	-	-
X_n	$\sqrt{2}$	-7	$\sqrt{13}$	-17	-	-	-

2- Une suite peut être donnée par une expression algébrique:

- La suite $(U_n)_n$ donnée par

$$U_n = \frac{2n+5}{\sqrt{n+3}} \quad ; \quad n \geq 0$$

- La suite $(V_n)_n$ donnée par

$$V_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n-7}} \quad ; \quad n \geq 8$$

- La suite $(W_n)_n$ donnée par

$$W_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{n+5}{3n+7}} & \text{si } n = 2k \\ \sqrt{\frac{n-1}{n+3}} & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \quad ; \quad k \geq 0$$

3- Une suite peut être donnée par une relation de récurrence. On l'appelle alors suite récurrente.

- La suite $(X_n)_n$ donnée par

$$\begin{cases} X_0 = 7 \\ X_{n+1} = 5X_n - \frac{1}{9\sqrt{5+X_n}} \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}.$$

- La suite $(Y_n)_n$ donnée par

$$\begin{cases} Y_0 = 3 \ ; \ Y_1 = \sqrt{7} \\ Y_{n+2} = Y_n + \frac{Y_{n+1}}{2+Y_n} \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}.$$

1.0.1 Suites arithmétiques:

Définition:

- La suite récurrente $(U_n)_n$ *donnée par la relation*

$$\begin{cases} U_0 = a \in \mathbb{R} \\ U_{n+1} = U_n + r \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}$$

est dite suite arithmétique de premier terme $U_0 = a \in \mathbb{R}$ *et de raison* $r \in \mathbb{R}$.

- On vérifie que cette suite arithmétique est aussi donnée par l'expression algébrique

$$U_n = U_0 + nr \ = a + nr \ ; \quad n \geq 0.$$

Exemples:

- La suite arithmétique $(U_n)_n$ de premier terme 0, de raison 2 est donnée par la relation

$$\begin{cases} U_0 \ = 0 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \ ; \quad n \geq 0 \end{cases}$$

ou encore par l'expression algébrique

$$\begin{aligned} U_n &= U_0 + nr \\ &= 2n \ ; \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

dite suite des nombres pairs.

- La suite arithmétique $(V_n)_n$ de premier terme 1, de raison 2 est donnée par la relation

$$\begin{cases} V_0 \ = 1 \\ V_{n+1} = V_n + 2 \ ; \quad n \geq 0 \end{cases}$$

ou encore par l'expression algébrique

$$V_n = V_0 + nr \ = 2n + 1 \ ; \quad n \geq 0$$

dite suite des nombres impairs.

Proposition:

La somme d'un nombre fini de termes successifs d'une suite arithmétique $(U_n)_n$ est donné par la formule

$$U_p + U_{p+1} + - + U_q = \frac{(q - p + 1)}{2} (U_p + U_q)$$

ou encore

$$U_m + U_{m+1} + - + U_{m+k} = \frac{k + 1}{2} (U_m + U_{m+k}).$$

Exemples:

- La suite arithmétique $(U_n)_n$ de premier terme (-7) et de raison 3 est donnée par l'expression algébrique

$$U_n = -7 + 3n \ ; \quad n \geq 0.$$

- La somme de ses 15 termes successifs à partir du $5^{\text{è}}$ terme est donnée par

$$U_5 + U_6 + - + U_{19} = \frac{15}{2} (U_5 + U_{19}) = 435.$$

- La suite arithmétique $(V_n)_n$ de premier terme (17) et de raison $\left(-\sqrt{7}\right)$ est donnée par l'expression algébrique

$$V_n = 17 - \sqrt{7} n \ ; \quad n \geq 0.$$

- La somme de ses 9 premiers termes successifs est donnée par

$$V_0 + V_1 + - + V_8 = \frac{9}{2} (U_0 + U_8) = 153 - 36\sqrt{7}.$$

1.0.2 Suites géométriques:

Définition:

- La suite récurrente $(V_n)_n$ donnée par la relation

$$\begin{cases} V_0 &= b \in \mathbb{R} \\ V_{n+1} &= qV_n \quad ; \quad n \geq 0 \end{cases}$$

est dite suite géométrique de premier terme $V_0 = b \in \mathbb{R}$ et de raison $q \in \mathbb{R}$.

- On vérifie que cette suite géométrique $(V_n)_n$ est aussi donnée par l'expression algébrique

$$V_n = V_0 q^n = bq^n \ ; \ n \geq 0.$$

Exemples:

- La suite des moitiés successives est la suite géométrique $(V_n)_n$ de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{2}$ donnée par

$$\begin{cases} V_0 &= 1 \\ V_{n+1} &= \frac{V_n}{2} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

ou encore

$$V_n = \frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ ; \ n \geq 0.$$

- La suite géométrique $(W_n)_n$ de premier terme $\sqrt{7}$ et de raison 5 est donnée par

$$\begin{cases} W_0 &= \sqrt{7} \\ W_{n+1} &= 5W_n \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

ou encore

$$W_n = W_0 5^n = \left(\sqrt{7}\right) 5^n \ ; \ n \geq 0.$$

Proposition:

La somme d'un nombre fini de termes successifs d'une suite géométrique $(V_n)_n$ de raison $q \neq 1$ est donné par la formule

$$V_m + V_{m+1} + - + V_p = \left(\frac{1 - q^{p-m+1}}{1 - q}\right) V_m$$

ou encore

$$V_m + V_{m+1} + - + V_{m+k} = \left(\frac{1 - q^{k+1}}{1 - q}\right) V_p.$$

Exemple:

- La suite géométrique $(V_n)_n$ de premier terme 7 et de raison $\left(\frac{1}{3}\right)$ est donnée par l'expression algébrique

$$V_n = 7. \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{7}{3^n} \ ; \ n \geq 0.$$

- La somme des 15 termes successifs à partir du $5^{\text{è}}$ terme de cette suite géométrique est

$$V_5 + V_6 + - + V_{19} = \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{15}}{1 - \frac{1}{3}}\right) V_5 = 0,045.$$

1.0.3 Suites arithmético-géométriques:

Définition:

La suite récurrente $(W_n)_n$ *donnée par la relation*

$$\begin{cases} W_0 &= c \in \mathbb{R} \\ W_{n+1} &= qW_n + r \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

est dite suite arithmético-géométrique de premier terme $W_0 = c \in \mathbb{R}$*, de raison géométrique* $q \in \mathbb{R}$ *et de raison arithmétique* $r \in \mathbb{R}$*.*

Exemples:

- La suite récurrente $(W_n)_n$ donnée par

$$\begin{cases} W_0 &= \sqrt{7} \\ W_{n+1} &= 3W_n + \sqrt{13} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

est une suite arithmético-géométrique de premier terme $\sqrt{7}$,
de raison arithmétique $r = \sqrt{13}$ et de raison géométrique $q = 3$.

- La suite récurrente $(Z_n)_n$ donnée par

$$\begin{cases} Z_0 &= 19 \\ Z_{n+1} &= \frac{Z_n}{7} - 3 \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

est une suite arithmético-géométrique de premier terme 19, de raison arithmétique $r = -3$ et de raison géométrique $q = \frac{1}{7}$.

Proposition:

Soit $(W_n)_n$ *une suite arithmético-géométrique de premier terme* $W_0 = c \in \mathbb{R}$*, de raison géométrique* $q \neq 1$ *et de raison arithmétique* $r \in \mathbb{R}$*. Alors:*

i- La suite $(V_n)_n$ *définie par*

$$V_n = W_n - \left(\frac{r}{1-q}\right) ; \ n \geq 0$$

est une suite géométrique de raison q *et de premier terme*

$$V_0 = W_0 - \left(\frac{r}{1-q}\right).$$

ii- La suite arithmético-géométrique $(W_n)_n$ *est donnée par l'expression algébrique*

$$W_n = \left(W_0 - \frac{r}{1-q}\right) q^n + \left(\frac{r}{1-q}\right) \ ; \ n \geq 0.$$

Exemple:

- Considérons la suite arithmético-géométrique $(W_n)_n$ donnée par la relation

$$\begin{cases} W_0 &= \sqrt{17} \\ W_{n+1} &= 3W_n + \sqrt{5} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}.$$

- La suite $(V_n)_n$ définie par

$$V_n = W_n - \frac{\sqrt{5}}{1-3} = W_n + \frac{\sqrt{5}}{2} \ ; \ n \geq 0$$

est géométrique de raison $q = 3$ et de premier terme

$$V_0 = \left(\sqrt{17} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

- La suite arithmético-géométrique $(W_n)_n$ est donnée par l'expression algébrique

$$W_n = \left(\sqrt{17} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) 3^n - \frac{\sqrt{5}}{2} \ ; \ n \geq 0.$$

1.0.4 Suites croissantes, suites décroissantes et suites monotones:

Définition:

- *Une suite* $(U_n)_{n \geq 0}$ *est dite croissante si*

$$U_n \leq U_{n+1} \ ; \ \forall n \geq 0.$$

- *Une suite* $(V_n)_{n \geq 0}$ *est dite décroissante si*

$$V_n \geq V_{n+1} \ ; \ \forall n \geq 0.$$

- *Une suite est dite monotone si elle est soit croissante soit décroissante.*

Exemples:

- La suite $(U_n)_n$ donnée par

$$U_n = \frac{1}{1 - n^2} \ ; \ n \geq 0$$

est une suite croissante donc monotone.

- La suite $(V_n)_n$ donnée par

$$\begin{cases} V_0 = -\sqrt{5} \\ V_{n+1} = V_n - \frac{1}{1+n^2} \ ; \ n \geq 0 \end{cases}$$

est une suite décroissante donc monotone.

- La suite $(W_n)_n$ donnée par

$$W_n = \frac{(-3)^n}{1 + n^2} \ ; \ n \geq 0$$

n'est ni croissante ni décroissante donc cette suite n'est pas monotone.

1.0.5 Suites majorées, suites minorées et suites bornées:

Définition:

- *La suite* $(U_n)_n$ *est dite majorée s'il existe* $M \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$U_n \leq M \ ; \ n \geq 0.$$

- *La suite* $(V_n)_n$ *est dite minorée s'il existe* $m \in \mathbb{R}$ *tel que*

$$V_n \geq m \ ; \ n \geq 0.$$

- *La suite est dite bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Exemples:

- La suite $(U_n)_n$ donnée par

$$U_n = \frac{1-n^3}{1+n^2} \ ; \ n \geq 0$$

est une suite majorée et non minorée donc non bornée.

- La suite $(V_n)_n$ donnée par

$$V_n = \frac{1+n^5}{1+n^4} \ ; \ n \geq 0$$

est une suite minorée et non majorée donc non bornée.

- La suite $(W_n)_n$ donnée par

$$W_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2} \ ; \ n \geq 0$$

est une suite bornée.

1.0.6 Suites convergentes et suites divergentes:

1.0.6.1 Rappel:

- On définit la valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$

$$|x| = \max(-x, x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases} .$$

- L'écart entre deux réels $x, y \in \mathbb{R}$ est

$$|x-y| = \begin{cases} x-y & \text{si} \quad x \geq y \\ y-x & \text{si} \quad x \leq y \end{cases} .$$

1.0.6.2 Notations:

L'ensemble de réels $x \in \mathbb{R}$ à un écart au plus $\delta > 0$ d'un réel $a \in \mathbb{R}$ donné est

$$\begin{aligned} [a-\delta, a+\delta] \quad : &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a-\delta \leq x \leq a+\delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-a| \leq \delta\} \end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}]a-\delta, a+\delta[\quad : &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a-\delta < x < a+\delta\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ |x-a| < \delta\} \end{aligned}$$

Définitions:

- *Une suite $(U_n)_n$ est dite convergente et converge vers $l \in \mathbb{R}$ si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \geq 1 \ \text{ tels que } \forall n \geq N \ \text{ on ait } \ |U_n - l| \leq \varepsilon.$$

- *On écrit*

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l \text{ ou encore } U_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} l.$$

- On dit aussi que la suite $(U_n)_n$ est de nature convergente.
- Une suite $(V_n)_n$ qui n'est pas convergente est dite divergente.
- On dit aussi que la suite $(V_n)_n$ est de nature divergente.

Exemples:

- La suite $(U_n)_n$ donnée par

$$U_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2} \ ; \ n \geq 0$$

est convergente et on a

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right) = 0$$

ou encore

$$\left(\frac{(-1)^n}{1+n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

- La suite $(V_n)_n$ donnée par

$$V_n = (-1)^n \ ; \ n \geq 0$$

est divergente.

- La suite $(W_n)_n$ donnée par

$$W_n = \begin{cases} \frac{n^2-2}{1+n^2} \ si \ n = 2k \\ \frac{2n^2}{1+n^2} \ si \ n = 2k+1 \end{cases} \ ; \ n \geq 0$$

est divergente.

Remarques:

- Tous les termes d'une suite convergente, sauf peut être un nombre fini d'entre eux, se condensent autour de sa limite qui est unique.

- Toute suite convergente est nécessairement bornée.

- Tous les termes d'une suite qui converge vers une limite non nulle sont de même signe sauf peut être un nombre fini.

- Une suite convergente à termes positifs admet une limite positif ou nul.

- On ne change pas la nature d'une suite en modifiant un nombre fini de ses termes et la limite reste inchangée pour une suite convergente.

1.0.7 Opérations sur les limites:

- La somme de deux suites convergentes est une suite convergente et converge vers la somme des deux limites.

- Le produit de deux suites convergentes est une suite convergente et converge vers le produit des deux limites.

- Le quotient de deux suites convergentes, quand il existe, est une suite convergente et converge vers le quotient des deux limites.

Exemple:

- La suite $(U_n)_{n\geq 0}$ donnée par

$$U_n = \frac{(n+1)^2}{1+3(1+n)^2} \ , \ n \geq 0$$

est convergente et on a

$$\lim_{n}\left(\frac{(n+1)^2}{1+3(1+n)^2}\right)=\frac{1}{3}$$

- La suite $(V_n)_{n\geq 0}$ donnée par

$$V_n=\frac{n+1}{2n+3}\ ,\ n\geq 0,$$

est convergente et on a

$$\lim_{n}\left(\frac{n+1}{2n+3}\right)=\frac{1}{2}.$$

- La somme

$$U_n+V_n=\frac{(n+1)^2}{1+3(1+n)^2}+\frac{n+1}{2n+3}\ ,\ n\geq 0$$

est convergente et on a

$$\lim_{n}\left(\frac{(n+1)^2}{1+3(1+n)^2}+\frac{n+1}{2n+3}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{5}{6}$$

- Le produit

$$U_n.V_n=\frac{(n+1)^3}{\left(1+3(1+n)^2\right)(2n+3)}\ ,\ n\geq 0$$

est convergente et on a

$$\lim_{n}\left(\frac{(n+1)^3}{\left(1+3(1+n)^2\right)(2n+3)}\right)=\frac{1}{6}$$

- Le quotient

$$\frac{U_n}{V_n}=\frac{(n+1)(2n+3)}{1+3(1+n)^2}\ ,\ n\geq 0$$

est convergente et on a

$$\lim_{n}\left[\frac{(n+1)(2n+3)}{1+3(1+n)^2}\right]=\frac{2}{3}.$$

1.0.8 Critères de convergence:

- Pour montrer qu'une suite est convergente, quoi de mieux que de trouver sa limite. Les critères de convergences permettent de conclure si une suite est convergente ou non sans préciser la valeur limite.

1.0.8.1 Critère de Cauchy:

- Une suite de nombres réels $(U_n)_n$ est convergente si, et seulement si, la suite $(U_n)_n$ vérifie le critère de Cauchy suivant:

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \ \exists N \geq 1 \text{ tels que } \forall p, q \geq N \text{ on ait } |U_p - U_q| \leq \varepsilon.$$

Exemple:
Etudiant la nature de la suite

$$\begin{cases} U_n = 1 + \frac{1}{2} + - - + \frac{1}{n} \\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \end{cases} ; \ n \geq 1$$

Evaluons

$$\begin{aligned} U_{2n} - U_n &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + - - + \frac{1}{2n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On a

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{k} \leq \frac{1}{n+1} \quad ; \quad n+1 \leq k \leq 2n.$$

D'où

$$U_{2n} - U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}.$$

Il s'en suit que la suite $(U_n)_{n\geq 1}$ ne vérifie pas le critère de Cauchy donc divergente.

1.0.8.2 Critère du gendarme:

Soient $(X_n)_n$, $(U_n)_n$ et $(Y_n)_n$ trois suites de nombres réels de sorte que

$$X_n \leq U_n \leq Y_n \ ; \ n \geq 0.$$

- Si les suites $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors nécessairement la suite $(U_n)_n$ est convergente et on a

$$\lim_n X_n = \lim_n U_n = \lim_n Y_n = l$$

Exemple:
Etudiant la suite $(V_n)_n$ donnée par

$$V_n = \left(\frac{-1}{1+n^2}\right)^n \quad ; \quad n \geq 1.$$

On a

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{-1}{1+n^2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad ; \quad n \geq 1$$

avec

$$\lim_n \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

D'après le critère du gendarme

$$\lim_n \left(\frac{-1}{1+n^2}\right)^n = 0.$$

1.0.8.3 Critère des suites croissantes:

Toute suite croissante majorée est convergente.

Exemple:

Etudiant la nature de la suite

$$\begin{cases} U_n = 1 + 1 + \frac{1}{2} + - - + \frac{1}{n!} \\ U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \end{cases} \; ; \; n \geq 1$$

On a

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0.$$

- La suite $(U_n)_n$ est croissante.

- On montre par recurrence que la suite $(U_n)_n$ est majorée par 3. D'après le critère des suites croissantes, la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est convergente.

1.0.8.4 Critère des suites décroissantes:

Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarque:

- Soit $(V_n)_n$ une suite décroissante minorée. La suite $(U_n)_n$ donnée par

$$U_n = -V_n \;\; , \;\; n \geq 1$$

est croissante majorée donc convergente. Il en résulte que la suite décroissante minorée $(V_n)_n$ est convergente.

1.0.9 Limites infinies:

Définition:

On dit qu'une suite $(U_n)_n$ diverge vers $+\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \to \infty} U_n = +\infty$$

ou encore

$$U_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} +\infty$$

si

$$\forall A > 0 \; , \; \exists N \geq 1 \; \text{ tels que } \forall n \geq N \; \text{ on ait } \; U_n \geq A.$$

Remarques:

- *Tous les termes d'une suite qui diverge vers $+\infty$, sauf peut être un nombre fini d'entre eux, sont plus grands que tout nombre fixé à l'avance.*

- *On ne change pas la nature d'une suite qui diverge vers $+\infty$ en modifiant un nombre fini de ses termes.*

- *Toute suite qui diverge vers $+\infty$ est non majorée.*

- *Toute croissante non majorée diverge vers $+\infty$.*

Définition:

On dit qu'une suite $(V_n)_n$ diverge vers $-\infty$ et on écrit

$$\lim_{n \to \infty} V_n = -\infty$$

ou encore

$$V_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

si

$$\forall B<0\ ,\ \exists N\geq 1 \text{ tels que } \forall n\geq N \text{ on ait } V_n\leq B.$$

Remarques:

- Tous les termes d'une suite qui diverge vers $-\infty$, sauf peut être un nombre fini d'entre eux, sont plus petits que tout nombre fixé à l'avance.

- On ne change pas la nature d'une suite qui diverge vers $-\infty$ en modifiant un nombre fini de ses termes.

- Toute suite qui diverge vers $-\infty$ est non minorée.

- Toute décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Exemples:

1- La suite $(U_n)_n$ donnée par

$$U_n=\frac{n^5}{1+n^2}\quad ;\quad n\geq 0.$$

diverge vers $+\infty$. On écrit

$$\lim_n\left(\frac{n^5}{1+n^2}\right)=+\infty \text{ ou encore } \left(\frac{n^5}{1+n^2}\right)_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

2- La suite $(V_n)_n$ donnée par

$$V_n=\frac{2-n^3}{1+n^2}\quad ;\quad n\geq 0.$$

diverge vers $-\infty$. On écrit

$$\lim_n\left(\frac{2-n^3}{1+n^2}\right)=-\infty \text{ ou encore } \left(\frac{2-n^3}{1+n^2}\right)_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Formes indéterminées:

Nous avons quatre formes indéterminées dont il faut lever l'indétermination:

- La somme de deux suites divergentes l'une vers $+\infty$ et l'autre vers $-\infty$.
- Le produit d'une suite convergente vers 0 par une autre divergente vers ∞.
- Le quotient de deux suites divergentes vers ∞ ou bien convergentes vers 0 toutes les deux.

Nous avons alors le tableau suivant des formes indéterminées:

1)	$(-\infty+\infty)$	2)	$(\infty.0)$
3)	$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	4)	$\left(\frac{0}{0}\right)$

Exemple:

On a les limites infinies suivantes

$$\lim_n\left(2^n\right)=+\infty$$

et

$$\lim_n\left(5-3^n\right)=-\infty.$$

- La somme présente une indétermination et on a

$$\lim_n [(2^n) + (5 - 3^n)] = -\infty.$$

- Le quotient présente une indétermination et on a

$$\begin{aligned}\lim_n \left[\frac{2^n}{5-3^n}\right] &= \lim_n \left[\left(\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{1}{\frac{5}{3^n} - 1}\right)\right] \\ &= 0.\end{aligned}$$

- Le produit de la somme par le quotient présente une indétermination et on a

$$\lim_n \left(\frac{2^n (2^n + 5 - 3^n)}{(5 - 3^n)}\right) = +\infty$$